Aristotele e il principio di transitività

La questione della cosiddetta perfezione dei sillogismi aristotelici costituisce uno snodo delicato non solo dell'esegesi antica ma anche della riflessione moderna sul fondamento della logica. Nel libro I degli Analitici Primi Aristotele distingue con chiarezza fra sillogismi "perfetti", che non hanno bisogno di alcun procedimento ulteriore per giungere alla conclusione, e sillogismi "imperfetti", che necessitano invece di riduzioni, conversioni o figure ausiliarie.
Il sillogismo Barbara (Se A si predica di tutti i B, e B di tutti i C, allora A di tutti i C) è da sempre assunto come prototipo del sillogismo perfetto. La ragione di questa perfezione, per molti interpreti moderni, risiede nella proprietà logica di transitività: Barbara non è che un caso della legge

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

Secondo Łukasiewicz (*Aristotle's Syllogistic*, Oxford, 1957), Patzig e la tradizione della logica novecentesca, la perfezione di Barbara non è un mistero filologico bensì l'evidenza immediata della transitività dell'inclusione tra insiemi o, più astrattamente, della predicazione universale.
Acerbi (*Transitivity Cannot Explain Perfect Syllogisms*, in "Rhizai", 2009, 6, pp. 23-42) contesta l'interpretazione di G. Patzig (*Aristotle's theory of the Syllogism*, Dordrecht, 1959), secondo cui i sillogismi perfetti di Aristotele (in particolare Barbara) risultano "evidenti" perché si basano sul principio di transitività della relazione "essere predicato di tutti". Patzig vede in Barbara (A è predicato di tutti B; B di tutti C; quindi A di tutti C) un'applicazione trasparente della transitività.
Acerbi sostiene invece che:
1. La transitività, come la intendiamo oggi, non coincide con le pratiche antiche.
2. Nella matematica greca, dove la transitività era applicata esplicitamente (uguaglianza, parallelismo, proporzionalità…), la forma canonica era omologica (aRb, cRb $\Rightarrow$ aRc), non contigua (aRb, bRc $\Rightarrow$ aRc).
3. Di conseguenza, Barbara, che usa la disposizione contigua, non poteva apparire agli antichi come la più "auto-evidente" applicazione della transitività.
4. Pertanto, spiegare la perfezione dei sillogismi aristotelici in termini di transitività è storicamente e filologicamente forzato.
Acerbi porta un'ampia indagine dei testi matematici (soprattutto Euclide) per mostrare che la pratica standard greca preferiva lo schema omologico.

Fornisce dati statistici (76 occorrenze omologiche vs. 35 contigue per l'uguaglianza negli Elementi) che danno robustezza empirica alla sua tesi.
Egli sottolinea che molte relazioni matematiche sono simmetriche, mentre "essere predicato di tutti" non lo è. Questo lo porta a discutere se Aristotele fosse davvero "costretto" allo schema contiguo: mostra che non lo era, e che avrebbe potuto (almeno in principio) usare relazioni converse per costruire schemi omologici.
Acerbi avverte che proiettare retroattivamente categorie moderne (transitività come la concepiamo oggi) è rischioso. Ricorda che i Greci ragionavano in linguaggio naturale, non simbolico, e che per loro la disposizione delle parole fungeva da criterio di evidenza logica. Mostra che Patzig, pur tentando di salvare la sua tesi per Barbara, non riesce a estenderla agli altri sillogismi perfetti della prima figura, se non introducendo strumenti estranei ad Aristotele (teoria delle relazioni, Lorenzen).
Acerbi assume che il modello di auto-evidenza per Aristotele dovesse coincidere con la prassi matematica greca. Questo è plausibile, ma non dimostrato: Aristotele potrebbe aver costruito il proprio criterio di "perfezione" dei sillogismi in un ambito logico-linguistico, non
I dati sugli Elementi sono presentati come decisivi, ma restano limitati: Euclide è posteriore di quasi un secolo e mezzo, e gli Elementi furono rielaborati in epoca tardoantica. Acerbi lo riconosce, ma minimizza forse troppo il rischio di retrodatare convenzioni stilistiche non aristoteliche.
Aristotele non si limita a mostrare l' "evidenza": definisce la prima figura come la più adatta a generare conoscenza dimostrativa, poiché da essa si derivano le altre. La "perfezione" ha quindi un valore teorico-sistematico, non solo percettivo di auto-evidenza. Acerbi concentra tutta la critica sul criterio di evidenza immediata, trascurando questa dimensione.
La "transitività" moderna è un concetto astratto e formale. Per Aristotele, invece, Barbara poteva apparire "ovvia" non perché rispettasse la forma statistica più diffusa nei testi matematici, ma perché rifletteva il principio del dictum de omni ("ciò che è predicato di tutti i membri di una classe vale anche per i sottoinsiemi"). Questo è concettualmente affine alla transitività, anche se non identico al modo euclideo di mostrarla.
Acerbi ha ragione nel dire che non possiamo assumere ingenuamente che Aristotele intendesse per "auto-evidenza" ciò che noi chiamiamo oggi transitività formale. I dati matematici supportano fortemente questa prudenza. Tuttavia, la sua critica appare un po' unilaterale: l'analogia con la prassi matematica non prova in modo definitivo che Aristotele non vedesse nei sillogismi perfetti un'applicazione della transitività. Potrebbe aver

concepito Barbara come una forma di transitività applicata a una relazione asimmetrica, diversa da quelle matematiche simmetriche. Inoltre, anche se l'argomento di Patzig non spiega tutto, resta possibile che Barbara fosse percepito come "ovvio" proprio perché ricalcava un modello intuitivo di concatenazione di predicazioni ("se A vale per tutti B, e B per tutti C, allora A vale per tutti C"). Questo schema può essere inteso come una variante di transitività, anche se non coincide con l'uso euclideo.

La tesi di Acerbi è solida nel mettere in guardia contro l'anacronismo e nel mostrare che la pratica matematica antica non conferma l'interpretazione di Patzig. Tuttavia, il suo rifiuto complessivo dell'esplicazione tramite transitività è forse troppo radicale: Aristotele poteva concepire la "perfezione" dei sillogismi non in termini matematici, ma logico-concettuali, e in quel contesto la nozione di transitività (pur intesa diversamente dalla nostra) resta un modello esplicativo ancora plausibile.

Vediamo come si possono apportare dei correttivi alle mosse argomentative di Fabio Acerbi (2009), il quale sostiene che la nozione moderna di transitività non spiega la «perfezione» (τέλεια) dei sillogismi aristotelici della prima figura - e in particolare Barbara - perché: (i) la pratica matematica antica privilegerebbe un ordine omologico e non contiguo delle formulazioni di inferenze per transitività, e (ii) la trasposizione di concetti moderni (prodotti relativi, algebra delle relazioni) sarebbe anacronistica e dunque insufficiente come spiegazione «from within».

Dimostrerò che, benché Acerbi avanzi osservazioni storiche utili, la sua argomentazione soffre di errori metodologici, di equivoci formali e di omissioni tecniche rilevanti. Allo scopo utilizzerò molteplici strumenti logici e matematici: (i) derivazioni in logica dei predicati (deduzione naturale), (ii) algebra delle relazioni e composizione, (iii) ricostruzioni nel calcolo dei sequenti e nella teoria dei modelli, (iv) analisi epistemologica della nozione di evidenza e (v) interpretazione corretta della metodologia di campionamento usata da Acerbi. L'obiettivo è duplice: mostrare le lacune argomentative di Acerbi e offrire una ricostruzione formale (compatibile sia con il testo aristotelico sia con la prassi matematica) che mantiene il ruolo esplicativo della transitività entro limiti storicamente accertabili.

Acerbi riassume e critica la proposta classica (Patzig, Łukasiewicz, ecc.) che vede nella disposizione contigua dei termini in Barbara una espressione della transitività della relazione «essere predicato di tutti» (A di tutti B; B di tutti C $\Rightarrow$ A di tutti C). Egli sostiene principalmente:

1. Che la consuetudine testuale nei trattati matematici greci (soprattutto Euclide) privilegia una formulazione omologica (cioè la forma *aRb; cRb $\Rightarrow$

aRc* o varianti) piuttosto che la formulazione contigua classica (*aRb; bRc ⇒ aRc*), ed esibisce dati e tabelle per l'uguaglianza, la proporzionalità ecc. (cfr. passaggi e tabelle in Acerbi).
2. Che quindi l'intuizione di Patzig sarebbe un'«imposizione» di una nozione moderna di transitività su una prassi lessicale diversa; inoltre, l'uso di strumenti formali moderni (prodotti relativi, algebra delle relazioni) sarebbe un'ulteriore artefatto teorico che non fornisce una spiegazione *da dentro* il mondo aristotelico.
3. Che, infine, la presenza di relazioni non simmetriche e non transitiva nell'ars syllogistica rende il ricorso alla solo nozione di transitività insufficiente per spiegare la distinzione aristotelica fra sillogismi «perfetti» e «non perfetti».
Questa è la posizione che mi propongo di criticare analiticamente.

Prima confutazione: la confusione tra formato testuale e contenuto logico-formale.
Acerbi sottolinea correttamente che la forma esterna (ordine delle parole, scelta di espressioni opposte, convenzioni di testo) nelle produzioni matematiche greche è spesso omologica. Ma da qui egli inferisce che, perché la prassi matematica usasse omologico, la nozione di transitività così intesa non sarebbe stata la fonte dell'«evidenza» per Aristotele. Questa inferenza contiene una fallacia di categoria: confonde la notazione/testualizzazione della transitività con la proprietà concettuale di transitività.
Prendiamo Barbara formalmente in logica dei predicati (usando variabili individuali e definizioni di classe):
- Premessa 1: ∀x (B(x) → A(x))
- Premessa 2: ∀x (C(x) → B(x))
- Conclusione: ∀x (C(x) → A(x))

Derivazione in deduzione naturale:
1. ∀x (B(x) → A(x)) — P1
2. ∀x (C(x) → B(x)) — P2
3. Assumi c arbitrario. — (assunzione per ∀-intro)
4. C(c). — (assunzione temporanea)
5. Da 2 e 3, B(c). — (∀-el, →-el)
6. Da 1 e 5, A(c). — (∀-el, →-el)
7. Quindi C(c) → A(c). — (→-intro, dai passi 4–6)
8. Per ∀-intro su c, ∀x (C(x) → A(x)). — (∀-intro)

Questa derivazione è trasparente, schematica e non dipende dall'ordine lessicale usato per esprimere le premesse nel testo: ciò che conta sono i contenuti formali (inclusione di classi) e le regole di inferenza. Pertanto, l'ordine «contiguo»/«omologico» è irrilevante alla vista della validità formale: la transitività della relazione di inclusione di classi (⊆) è sufficiente per spiegare il meccanismo inferenziale.
Conclusione parziale: l'argomento storico di Acerbi, anche se pertinente sul piano della prassi testuale, non indebolisce la spiegazione formale mediante transitività: l'evidenza logica di Barbara è riconoscibile nel sistema della logica dei predicati, indipendentemente dalla scelta notazionale (contigua/omologica).

Seconda confutazione: algebra delle relazioni, composizione e prodotti relativi
Acerbi critica la trasformazione moderna che usa prodotti relativi o la teoria delle relazioni (Lorenzen, De Morgan) per spiegare i sillogismi. Qui mostro che quella trasformazione è legittima, non un semplice artefatto teorico, e che le obiezioni di Acerbi sono insufficienti ad annullarne valore esplicativo.
Definiamo la relazione di predicazione universale come una relazione binaria R tra classi/termini: diciamo x R y se "tutto y è tale che x predicato di y" — formalmente, se y ⊆ x. Allora la composizione di relazioni (∘) permette di esprimere: se B⊆A e C⊆B allora C⊆A, cioè (⊆)∘(⊆) ⊆ (⊆). In termini di relation algebra, la transitività è semplicemente la proprietà: ⊆ ∘ ⊆ ⊆ ⊆ (scrittura informale: ⊆ ∘ ⊆ = ⊆).
Questa ricostruzione mostra che:
- (i) I sillogismi della prima figura sono casi particolari dell'operazione generale di composizione di relazioni;
- (ii) l'algebra delle relazioni non imprime un significato estraneo allo schema aristotelico, ma fornisce una formalizzazione naturale del meccanismo semantico che Aristotele descrive.
Acerbi obietta che usare un formalismo moderno per spiegare un testo antico è anacronistico. Ma i modelli esplicativi sono strumenti metodologici: una spiegazione formale non dice che Aristotele pensava in algebra delle relazioni, ma che il suo schema è isomorfo a un concetto più generale (composizione di relazioni). L'isomorfismo è una spiegazione valida sul piano teorico: se la proprietà logica sottostante è la stessa, la spiegazione è coerente, utile e non «illegittima» per motivi storici, fintanto che si distingue tra modello e contenuto storico (cosa Acerbi stesso riconosce ma poi minimizza).

Terza confutazione: sull'asimmetria delle relazioni e l'argomento di Acerbi
Acerbi osserva che molte relazioni presenti nella teoria aristotelica non sono simmetriche (e.g. «maggiore di», «inclusione universale»), e che le pratiche matematiche antiche usavano spesso la conversa della relazione per adattare l'ordine testuale. Da questo conclude che la transitività così intesa non spiega la perfezione in generale.
La transitività si applica alla relazione giusta: non occorre che tutte le relazioni aristoteliche siano transitive; basta che la relazione cardine in Barbara - quella di predicazione universale/ inclusione - sia transitiva. Formalmente:
- Se la relazione R è definita come "essere universale predicato di" (corrispondente a $\supseteq$ o $\subseteq$ come preferite), allora R è transitiva: $\forall x \forall y \forall z\ (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$.
- Per sillogismi che mescolano relazioni diverse (e.g. > e =), occorre analizzare la composizione; ma la teoria delle relazioni dà strumenti (prodotti relativi, composizione) per trattare esattamente quei casi.
In breve: il fatto che esistano relazioni non-transitive non svuota il ruolo esplicativo della transitività per il caso specifico di Barbara. La generalità dell'argomento di Acerbi (che la transitività non spiega tutti i casi) non implica falsità della tesi più limitata (che la transitività spiega perché Barbara è «evidente»).

Quarta confutazione tecnica: sequenti, normalizzazione e natura della «evidenza»
Acerbi lega il concetto di «evidenza» aristotelico (τὸ τέλος / teleion) a pratiche lessicali concrete. Io propongo un'analisi diversa:
- In un sistema di deduzione naturale o in un calcolo dei sequenti, la regola che trasforma $\{\forall x(B \rightarrow A), \forall x(C \rightarrow B)\}$ in $\forall x(C \rightarrow A)$ è localmente normalizzabile e cut-free (l'esistenza di una derivazione senza cut mostra che la conclusione è evidenziabile direttamente dalle premesse).
- Se evidenza significa qui: "la conclusione è ottenibile con un procedimento di derivazione che non richiede ulteriori assunzioni ad hoc", allora il carattere di «perfezione» di Barbara è spiegato dal fatto che la derivazione è formalmente purificabil* (cut elimination).
Questo approccio rende conto dell'intuizione di Aristotele su cosa renda un sillogismo più evidente: non l'ordine testuale, ma la presenza di una derivazione elementare che non richiede passaggi indeterminati o esigenze di premessa aggiuntiva. Acerbi non adotta o non sfrutta questa prospettiva

metateorica; qui sta una sua omissione teorica importante.
Acerbi presenta una tabella di occorrenze tratte dagli Elementi e segnala una forte predominanza della formulazione omologica (complessivamente 151 vs 49 in una somma aggregata), con commento che la probabilità di ottenere quel risultato per caso è «meno di 1 su 10^7» (Acerbi).
Se trattiamo la questione come un test binomiale semplice (N = 200, k = 151), sotto l'ipotesi nulla che le due classi (omologico vs contiguo) siano equiprobabili (p = 0.5), il p-value P(X ≥ 151) è estremamente piccolo (~ 1.37×10^−13). Ciò significa che la deviazione è statisticamente significativa sotto quell'ipotesi. (Il risultato numerico rafforza - non indebolisce - la tesi che la prassi matematica è fortemente sbilanciata verso lo schema omologico).
Ma la significatività statistica non risolve la questione concettuale: Acerbi assume implicitamente che la frequenza testuale equivalga a priorità concettuale (che il modo più frequente di esprimere transitive inferenze sia la forma che rende il concetto più naturale). Questa è una assunzione empirico-filologica che richiede più rigore:
1. Bias di campionamento: Acerbi si basa largamente su Euclide (testo molto rimaneggiato, tradizioni mnemoniche, traduzioni e interpolazioni). Anche se Euclide è una fonte ch'egli giustamente privilegia, non è garantito che la forme del testo che ci è pervenuto rispecchino senza distorsioni la prassi di età aristotelica. Acerbi lo riconosce, ma non valuta quantitativamente l'effetto di corruzione/manomissione.
2. Indipendenza delle occorrenze: molte formule sono ripetute per ragioni didattiche o per ritualità testuale (schema espositivo), quindi le occorrenze non sono campioni indipendenti. Questo viola l'assunzione binomiale di indipendenza.
3. Classificazione soggettiva: la scelta di cosa conteggiare come «omologico» vs «contiguo» può dipendere da edizioni/manoscritti; piccole varianti del testo possono spostare un'occorrenza da una categoria all'altra.
4. Confusione di unità di analis: alcuni passi contengono "passaggi impliciti" (inferenze compresse) dove l'ordine effettivo del ragionamento non è direttamente osservabile; codificarli richiede decisioni ermeneutiche.
Conclusione statistica: sebbene i numeri di Acerbi indichino una forte predominanza del formato omologico nella prassi matematica (e questo sia probabilmente vero), dalla sola significativa squilibrio non può seguire la conclusione epistemologica che la transitività non poté costituire l'interpretazione principale di Barbara. Anche con quei dati, la spiegazione formale della transitività resta plausibile e metodologicamente più forte, perché tratta il problema a livello delle proprietà logiche piuttosto che delle

convenzioni sintattiche del testo.

Quinta confutazione: spiegazione Esaustiva vs. Modello Esplicativo
Acerbi sembra chiedere che un'interpretazione sia internamente aristotelica (i.e., che Aristotele pensasse e formulasse in modo identico alla teoria delle relazioni moderne) perché la consideri valida. Questa è una richiesta eccessivamente restrittiva: il compito del filosofo/logicista è spiegare, non mettere parole nella mente di Aristotele. Un modello moderno che ricostruisce il meccanismo formale sottostante è utile se:
- (a) è isomorfo alla struttura logica del testo, e
- (b) permette di spiegare perché Aristotele prende certe distinzioni (perfezione vs imperfezione).
La ricostruzione tramite transitività soddisfa (a) e (b): spiega, sul piano formale, perché il passaggio è immediato (uso di $\forall\rightarrow$ e modus ponens universale) ed è compatibile con la nozione aristotelica di sillogismo «che non ha bisogno d'altro» (An. Pr. 24b23–24). Acerbi non dimostra che questa corrispondenza manchi; al più mette in luce altre possibili influenze storiche - ma questo non basta a demolire la plausibilità del modello formale.

Ripercorriamo i passaggi salienti della questione in termini formali.
1. Aristotele e il dictum de omni et nullo
Il passo chiave degli Analitici Primi (24b22–25) recita:

Se A si predica di tutti i B, e B di tutti i C, allora A si predica di tutti i C.

Formalizzato in logica dei predicati:

$$\forall x\,(B(x) \rightarrow A(x)),\ \forall x\,(C(x) \rightarrow B(x)) \vdash \forall x\,(C(x) \rightarrow A(x))$$

Si tratta di una legge universale valida in ogni struttura, che noi oggi riconosciamo come manifestazione della transitività. Aristotele non aveva il vocabolario moderno, ma il ragionamento stesso non lascia dubbi.

2. Euclide e le catene di uguaglianze
Negli Elementi, la transitività appare costantemente:

$$AB = CD,\ CD = EF \Rightarrow AB = EF$$

In simboli relazionali:

$(=) \circ (=) \subseteq (=)$
Acerbi rileva che la forma espressiva è spesso omologica (si afferma che ciò che è uguale a una stessa cosa è uguale fra loro). Ma questo è un modo linguistico di dire: la proprietà sottostante resta transitiva.
Gli Stoici introdussero la regola:

$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow r)$

Si tratta della versione proposizionale di Barbara, e corrisponde esattamente alla transitività
Nel medioevo Buridano parlò di catena terminorum. L'idea di concatenazione lineare dei predicati è la traduzione scolastica della transitività:
Si omnis B est A, omnis C est B, ergo omnis C est A
Leibniz individua nella transitività della predicazione una legge fondamentale del pensiero. Boole traduce Barbara nell'algebra degli insiemi:
$BA = B, CB = C \Rightarrow CA = C$
De Morgan elaborò la teoria delle relazioni, in cui la transitività è proprietà cardine.

Analisi logico-formale
1. Deduzione naturale
La derivazione di Barbara in deduzione naturale, per un termine arbitrario c:

$\forall x (B(x) \rightarrow A(x))$

$\forall x (C(x) \rightarrow B(x))$

Supponi $C(c)$

Da (2): $C(c) \rightarrow B(c)$

Modus ponens su (3),(4): $B(c)$

Da (1): $B(c) \rightarrow A(c)$

Modus ponens su (5),(6): $A(c)$

Quindi $C(c) \rightarrow A(c)$

Generalizzazione: $\forall x\ (C(x) \rightarrow A(x))$
Questa derivazione è normalizzata, non contiene passaggi superflui.

2. λ-calcolo tipato
Il termine che rappresenta Barbara è:

$M = \Lambda\alpha.\ \lambda f: B \rightarrow A.\ \lambda g: C \rightarrow B.\ \lambda x: C.\ f(g(x))$

Tipo: $(B \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A)$

La β-riduzione di M è immediata: nessuna ridondanza. Barbara è “perfetto” nel senso proof-theoretic: il termine è in forma normale.

3. Calcolo dei sequenti
Premesse:

$\vdash \forall x\ (B(x) \rightarrow A(x)) \vdash \forall x\ (C(x) \rightarrow B(x))$

Derivazione cut-free:

$C(t) \vdash B(t)$ $B(t) \vdash A(t)$
---------- ----------
$\vdash C(t) \rightarrow B(t) \vdash B(t) \rightarrow A(t)$

$C(t) \vdash A(t)$
$\Rightarrow$ ∀-intro

Il fatto che Barbara sia derivabile senza cut equivale, in termini gentzeniani, alla definizione di “perfezione”.

4. Algebra delle relazioni
Definiamo:

$R = \{(X,Y) \mid Y \subseteq X\}$

Allora:

$(A,B) \in R, (B,C) \in R \Rightarrow (A,C) \in R$

Ovvero:

$R \circ R \subseteq R$

La perfezione di Barbara è la transitività di R.

5. Teoria dei modelli
In un modello M = (D, I):

$I(B) \subseteq I(A), I(C) \subseteq I(B) \Rightarrow I(C) \subseteq I(A)$

Questa validità è universale, indipendente da Euclide o Aristotele.

6. Logica modale
Barbara può essere letto in logica modale come:

$\Box(B \rightarrow A), \Box(C \rightarrow B) \vdash \Box(C \rightarrow A)$

È cioè la transitività dell'operatore □ in frame seriali e transitivi.

7. Teoria delle categorie
In Set, le inclusioni sono morfismi monomorfici:

$C \hookrightarrow B, B \hookrightarrow A \Rightarrow C \hookrightarrow A$

Barbara è la composizione di monomorfismi. La perfezione coincide con la funtorialità della composizione.

Analisi statistica estesa
1. Il problema statistico secondo Acerbi
Fabio Acerbi ha sostenuto che nei testi matematici greci, in particolare negli Elementi di Euclide, la forma "omologica" della concatenazione transitiva (cioè quella espressa come "se a = b e c = b allora a = c") sia di gran lunga più frequente rispetto alla forma "contigua" ("se a = b e b = c allora a = c"). Su 200 occorrenze censite, 151 hanno struttura omologica e solo 49 quella contigua.

Approccio frequentista: test binomiale
Ipotesi nulla: H_0, entrambe le forme sono equiprobabili $\rightarrow$ p = 0.5

Distribuzione binomiale:

$P(X = k) = C(200, k) \cdot (0.5)^k \cdot (0.5)^{(200-k)} = C(200, k) \cdot (0.5)^{200}$

Probabilità di osservare almeno 151 occorrenze omologiche:

$P(X \geq 151) = \Sigma_{k=151}^{200} [C(200, k) \cdot (0.5)^{200}]$

Approssimazione:

Media: $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0.5 = 100$

Deviazione standard: $\sigma = \sqrt{(n \cdot p \cdot (1 - p))} = \sqrt{(200 \cdot 0.25)} = \sqrt{50} \approx 7.07$

Scarto: $151 - 100 = 51 \Rightarrow z \approx 7.2$

Valore p:

$P(X \geq 151) \approx 1.37 \times 10^{-13}$

Conclusione frequentista: la preferenza per la forma omologica è statisticamente significativa.

Intervallo di confidenza
Stima puntuale:

$\hat{p} = 151 / 200 = 0.755$

Varianza stimata:

$\hat{\sigma}^2 = (\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})) / n = (0.755 \cdot 0.245) / 200 \approx 0.000925$

Deviazione standard:

$\hat{\sigma} = \sqrt{0.000925} \approx 0.0304$

Intervallo al 95%:

$\hat{p} \pm 1.96 \cdot \hat{\sigma} = 0.755 \pm 0.0595 \Rightarrow 0.695 \leq p \leq 0.815$

Conclusione: la proporzione omologica è tra il 70% e l'81%, ben al di sopra del 50%.

Approccio bayesiano: formula di Bayes
Passiamo ora alla prospettiva bayesiana, che ci permette di formalizzare la questione delle ipotesi alternative. Siano:

H_1: l'ipotesi che lo schema omologico sia preferito (cioè $p > 0.5$);

H_2: l'ipotesi che non vi sia preferenza (cioè $p = 0.5$).

Abbiamo osservato i dati D = 151 occorrenze omologiche su 200.

La formula di Bayes è:

$$P(H_1 \mid D) = [P(D \mid H_1) \cdot P(H_1)] / [P(D \mid H_1) \cdot P(H_1) + P(D \mid H_2) \cdot P(H_2)]$$

Se assumiamo prior uniformi, cioè $P(H_1) = P(H_2) = 0.5$, la formula diventa:

$$P(H_1 \mid D) = P(D \mid H_1) / [P(D \mid H_1) + P(D \mid H_2)]$$

Calcolo delle verosimiglianze
Sotto H_2, con $p = 0.5$:

$$P(D \mid H_2) = C(200,151) \cdot (0.5)^{151} \cdot (0.5)^{49} = C(200,151) \cdot (0.5)^{200}$$

Sotto H_1, supponiamo $p = 0.8$:

$$P(D \mid H_1) = C(200,151) \cdot (0.8)^{151} \cdot (0.2)^{49}$$

Semplificazione della formula di Bayes
Inserendo queste quantità nella formula:

$$P(H_1 \mid D) = [C(200,151) \cdot (0.8)^{151} \cdot (0.2)^{49}] / [C(200,151) \cdot (0.8)^{151} \cdot (0.2)^{49} + C(200,151) \cdot (0.5)^{200}]$$

Il coefficiente binomiale C(200,151) compare in entrambi i termini e si semplifica, per cui resta:

$P(H_1 \mid D) = (0.8)^{151} \cdot (0.2)^{49} / [(0.8)^{151} \cdot (0.2)^{49} + (0.5)^{200}]$
Discussione del risultato
Ora, sia $(0.8)^{151} \cdot (0.2)^{49}$ sia $(0.5)^{200}$ sono numeri estremamente piccoli, ma il primo è enormemente più grande del secondo. Per vederlo, prendiamo i logaritmi:

$\ln[(0.8)^{151} \cdot (0.2)^{49}] = 151 \cdot \ln(0.8) + 49 \cdot \ln(0.2)$

Calcoliamo:

$\ln(0.8) \approx -0.2231 \rightarrow 151 \cdot \ln(0.8) \approx -33.7$

$\ln(0.2) \approx -1.609 \rightarrow 49 \cdot \ln(0.2) \approx -78.8$

Somma = −112.5

Dunque: $(0.8)^{151} \cdot (0.2)^{49} \approx e^{-112.5}$ Ora: $(0.5)^{200} = e^{\wedge}(200 \cdot \ln(0.5)) = e^{-138.6}$

Confronto: −112.5 contro −138.6 Il primo valore è circa e^{26} volte più grande del secondo, cioè circa 2×10^{11} volte più probabile.

Quindi:

$P(H_1 \mid D) \approx 1 / [1 + e^{-26}] \approx 0.99999999999$

Interpretazione critica
Dal punto di vista bayesiano, i dati rendono praticamente certa l'ipotesi H_1: che la forma omologica sia privilegiata.
Ma qui è l'errore di Acerbi. Questa probabilità non riguarda Aristotele, né la nozione concettuale di perfezione sillogistica. Riguarda soltanto lo stile euclideo, cioè la preferenza linguistica di un testo matematico per una formulazione piuttosto che per un'altra.
È un salto metodologico illegittimo passare da "Euclide preferiva lo schema omologico" a "Aristotele non pensava la perfezione come transitività". La formula di Bayes è corretta, ma il modello concettuale su cui si applica non è giustificato.

Partiamo da ciò che è veramente in gioco. Acerbi procede, più o meno, così: osserva un dato empirico \(D\) (nel nostro caso: 151 occorrenze omologiche su 200 in Euclide), conclude con una generalizzazione descrittiva E («la prassi matematica preferiva lo schema omologico») e quindi fa il passo interpretativo che gli interessa: da E deduce o argomenta la negazione di T, dove T è la teoria «la transitività è l'esplanans (la spiegazione) della perfezione dei sillogismi (es. Barbara)».
Il nostro compito è mostrare che questo secondo passo non segue né logicamente né probabilisticamente senza ulteriori ipotesi. Formalizzerò la catena tramite probabilità condizionate e ne rivelerà la debolezza con i calcoli.
(A) Modello probabilistico gerarchico: legge totale e Bayes in forma completa
Introduciamo le proposizioni:
D = «si osservano 151 occorrenze omologiche su 200» (dato empirico);
E = «la prassi testuale/epistemica preferiva lo schema omologico» (ipotesi descrittiva sul corpus/stile);
T = «la transitività spiega la perfezione sillogistica» (ipotesi teorica).
Ci interessa la quantità P(T|D): la probabilità che la transitività sia la spiegazione, alla luce dei dati. Per la legge della probabilità totale possiamo scrivere (sommando su i possibili stati di E, qui solo due per semplicità: E vero o falso):

$$P(T \mid D) = P(T \mid E, D) \cdot P(E \mid D) + P(T \mid \neg E, D) \cdot P(\neg E \mid D). \quad (1)$$

Questa identità è fondamentale: il valore di P(T|D) non dipende soltanto da P(E|D) (che i dati possono rendere alto), ma anche da P(T|E,D), cioè da quanto la verità di E influenzerebbe la credenza in T. Se non specifichiamo P(T|E,D) non siamo in grado di passare da P(E|D) a P(T|D).
Spesso si assume (implicitamente) che T e D siano condizionatamente indipendenti dato E, cioè $P(T \mid E, D) = P(T|E)$. Con questa assunzione (plausibile in molti setting) (1) si semplifica in:

$$P(T \mid D) = P(T|E) \cdot P(E|D) + P(T|\neg E) \cdot P(\neg E \mid D). \quad (2)$$

Ora applichiamo questa identità numericamente, usando i dati e alcune ipotesi ragionevoli.
(A.1) Valutazione di P(E|D) — Bayes semplice per la preferenza stilistica
Per stimare P(E|D) partiamo da un modello semplice: osserviamo X=151

successi su n=200. Sia p la probabilità che una occorrenza sia omologica in un testo dello stesso genere; sotto E ci aspettiamo p alto (es. 0.8), sotto ¬E ci aspettiamo p circa 0.5 (nessuna preferenza).
La verosimiglianza binomiale è:

P(D|p) = C(200,151) · p^151 · (1-p)^49.

Per confrontare modelli p=0.8 (modello E) vs p=0.5 (modello ¬E), il fattore di verosimiglianza (likelihood ratio / Bayes factor quando priors uguali) è

BF = P(D|p=0.8) / P(D|p=0.5) = [C(200,151) · 0.8^151 · 0.2^49] / [C(200,151) · 0.5^200] = (0.8^151 · 0.2^49) / 0.5^200. (3)

Prendiamo i logaritmi per manipolare numeri piccoli:

ln(BF) = 151·ln(0.8) + 49·ln(0.2) - 200·ln(0.5).

Calcoli (con approssimazioni standard):

ln(0.8) ≈ -0.22314355, quindi 151·ln(0.8) ≈ -33.679.
ln(0.2) ≈ -1.6094379, quindi 49·ln(0.2) ≈ -78.862.
ln(0.5) ≈ -0.69314718, quindi 200·ln(0.5) ≈ -138.629.
Sommiamo i primi due e sottraiamo il terzo:

ln(BF) ≈ -33.679 -78.862 +138.629 = 26.088.

Quindi

BF ≈ e^26.088 ≈ 2.05×10^11.

Questo è un Bayes factor colossale: i dati sono circa 2·10^11 volte più probabili sotto p=0.8 che sotto p=0.5. Con priors a priori uguali su E e ¬E, la probabilità a posteriori P(E|D) è praticamente 1 (es. 1 - 5×10^-12), perciò i dati confermano fortemente la preferenza stilistica E. Qui Acerbi ha ragione empirica e statistica: Euclide mostra una forte inclinazione all'omologico.
(A.2) Ma P(T|D) dipende da P(T|E): la legge totale (ripresa)
Inseriamo il risultato precedente in (2). Dato che P(E|D) ≈ 1 (per il nostro confronto semplice), otteniamo

$P(T|D) \approx P(T|E)$. (4)

Quindi l'unico elemento che conta per $P(T|D)$ è quanto E (se vero) riduca o meno la probabilità di T. Se $P(T|E)$ è ancora alto, allora $P(T|D)$ rimane alto anche se i dati supportano E quasi senza riserva. Questo è il cuore della nostra obiezione: i dati da soli non dicono nulla su $P(T|E)$. Per concludere che $P(T|D)$ è basso bisogna mostrare che $P(T|E)$ è basso — e questa è una ipotesi aggiuntiva, non derivabile automaticamente da D.

(B) Contro-modelli semantici: mostrare che D e T possono essere simultaneamente veri

La via più immediata per smentire un'asserzione di tipo «D implica ¬T» è costruire un mondo possibile (contro-modello) in cui D e T sono entrambe vere. Presento due ragioni concrete per l'esistenza di tali modelli, espresse in parole ma formalmente convincenti.

Differenza di livello esplicativo. È perfettamente coerente che una comunità (Euclide e imitatori) abbia una prassi espositiva in cui prediligere l'omologico per motivi retorici (brevità, chiarezza didattica, convenzione testuale), mentre i teorici del sillogismo (Aristotele) formulino la nozione di perfezione in termini di proprietà delle relazioni — ossia la transitività dell'inclusione. Se si accetta che stile e fondamento formale siano piani diversi, non c'è contraddizione. Il mondo descritto è: D vero (Euclide preferiva l'omologico) e T vero (la transitività è spiegazione della perfezione). Questo è un contro-modello.

Esempio concreto (costruzione testuale). Immaginiamo che Euclide, per ragioni di didattica, dica: «ciò che è uguale a una terza figura è uguale fra loro». Questo è l'omologico. Aristotele, in un trattato di logica, dica: «se A è predicato di tutti i B e B di tutti i C, allora A di tutti i C» — e lo argomenti con un ragionamento che è formalmente la transitività. Non vediamo alcuna incompatibilità testuale o logica: l'uno è stile, l'altro è struttura. Quindi esiste un modello testuale in cui $D \wedge T$ è vero.

Perciò, dal punto di vista logico-semantico, $D \not\models \neg T$. L'entailment non sussiste.

(C) Analisi di sensibilità numerica: quanto forte dovrebbe essere $P(T|E)$ per mandare giù $P(T|D)$?

Per rendere operativo l'argomento, mostriamo con esempi numerici la sensibilità di $P(T|D)$ rispetto a $P(T|E)$.

Ricordiamo (2):

$P(T|D) = P(T|E) \cdot P(E|D) + P(T|\neg E) \cdot P(\neg E|D)$.

Abbiamo già che P(E|D) ≈ 0.999999999995 (praticamente 1), ma per semplicità useremo P(E|D)=0.999 come approssimazione molto conservativa. Di conseguenza P(¬E|D)=0.001.

Ora proviamo alcuni valori ipotetici (plausibili o estremi) per P(T|E) e P(T|¬E):

Caso 1 (ottimistico per la transitività): P(T|E)=0.8, P(T|¬E)=0.9.
Allora P(T|D) ≈ 0.8·0.999 + 0.9·0.001 = 0.7992 + 0.0009 = 0.8001 ≈ 0.80.
Conclusione: i dati quasi non abbassano la probabilità di T.
Caso 2 (neutro): P(T|E)=0.5, P(T|¬E)=0.5.
Allora P(T|D) ≈ 0.5·0.999 + 0.5·0.001 = 0.5.
Conclusione: i dati lasciano la probabilità di T invariata.
Caso 3 (Acerbi forte): P(T|E)=0.1, P(T|¬E)=0.9.
Allora P(T|D) ≈ 0.1·0.999 + 0.9·0.001 = 0.0999 + 0.0009 = 0.1008 ≈ 0.10.
Conclusione: solo se si assume che la verità di E riduca drasticamente la probabilità di T (qui a 0.1) i dati implicano che T diventi molto improbabile.
Questa tabella di esempi mostra chiaramente che la grandezza decisiva è P(T|E). I dati producono quasi esclusivamente informazione su P(E|D), non su P(T|E). Ecco perché l'inferenza di Acerbi è incompleta: egli mostra (in modo convincente) che P(E|D) è altissima, ma non argomenta che P(T|E) debba essere bassa.
(D) Errori logici / cosa manca nella catena argomentativa di Acerbi
Le carenze dell'argomento di Acerbi sono dunque di due tipi principali:
Mancanza di una relazione causale/condizionale esplicita: per far sì che D indebolisca T serve una argomentazione che mostri perché la preferenza stilistica E rende incompatibile l'adozione della transitività come criterio di evidenza. Bisogna cioè argomentare P(T|E) basso mostrando, ad esempio, che la prassi omologica è incompatibile con la concettualità di transitività. Acerbi non fornisce questa argomentazione; limita la discussione alla frequenza testuale.
Problemi di popolazione e di inferenza causale: Euclide è una fonte storicamente particolare. Da D (frequenza in Euclide) a generalizzazioni su Aristotele occorre dimostrare connessioni storiche forti (trasmissione di idee, influenza, differenze di discorso tecnico). Senza prove sulle connessioni storiche, il passaggio E ⇒ ¬T non è sostenuto.

Transitività e sillogismi perfetti: confutazione logico-matematica delle tesi di Fabio Acerbi
1. Preliminari concettuali

La parola "transitività" non compare mai negli Analitici Primi; eppure, ogni logico contemporaneo avverte che lo schema
Per ogni x (B(x) implica A(x)), per ogni x (C(x) implica B(x)) quindi per ogni x (C(x) implica A(x))
è un'applicazione esatta di quella proprietà che oggi definiamo:
Trans(R) := per ogni x per ogni y per ogni z (xRy e yRz implica xRz).
L'obiezione di Acerbi consiste nel negare che Aristotele concepisse la perfezione in questi termini. Ma ciò, come mostrerò, non mina l'analisi: l'isomorfismo formale resta.

2. Deduzione naturale avanzata
Non basta mostrare la derivazione "elementare" di Barbara; occorre insistere sulla normalizzazione. Consideriamo un sistema Fitch con regola di generalizzazione parametrica. La derivazione completa:

per ogni x(B(x) → A(x))
per ogni x(C(x) → B(x))
[assunzione] c arbitrario
[assunzione] C(c)
da (2): C(c) → B(c)
modus ponens su (4),(5): B(c)
da (1): B(c) → A(c)
modus ponens su (6),(7): A(c)
discharge di (4): C(c) → A(c)
discharge di (3): per ogni x(C(x) → A(x)).

Ora, la proprietà interessante è che questa dimostrazione appartiene alla classe dei termini normali nel calcolo λ→ con tipi impliciti. Tradotto:
M := Λα.λf:Bα → Aα.λg:Cα → Bα.λx:Cα. f(g(x))
è un termine del λ-calcolo che realizza la deduzione di Barbara. La sua riduzione β è immediata: non contiene redex superflui, dunque è già in forma normale. Questo è un modo proof-theoretic per tradurre l'idea aristotelica di perfezione.

3. Calcolo dei sequenti e cut-elimination
Consideriamo i sequenti:
⊢ per ogni x(B(x) → A(x)), ⊢ per ogni x(C(x) → B(x)).
In Gentzen LK:

da per ogni-elim otteniamo $C(t) \vdash B(t)$, $B(t) \vdash A(t)$.
Unendo: $C(t) \vdash A(t)$.
Con per ogni-intro: $\vdash$ per ogni $x(C(x) \rightarrow A(x))$.

Qui la derivazione è cut-free. L'eliminazione del cut è, come noto, il criterio per distinguere derivazioni "pure" da quelle che richiedono passaggi mediatori. Il fatto che Barbara sia derivabile cut-free significa esattamente che "non abbisogna di altro".

4. Algebra delle relazioni
Definiamo:
$R_{AB} := \{(x,y) \mid y \subseteq x\}$.
Allora Barbara afferma:
$(A,B) \in R$ e $(B,C) \in R$ implica $(A,C) \in R$.
Formalmente:
$R \circ R \subseteq R$.
È la definizione stessa di transitività. Non è un'interpretazione indebita, ma una caratterizzazione matematica canonica.

5. Semantica tarskiana
Dato un modello $M = (D, I)$:

Se $I(B) \subseteq I(A)$
e $I(C) \subseteq I(B)$
allora $I(C) \subseteq I(A)$.

Questo vale per qualunque M. Ergo, Barbara è valido in senso semantico assoluto. Il concetto di transitività non dipende da convenzioni linguistiche, ma da proprietà strutturali di insiemi e relazioni.

6. Critica ad Acerbi
Acerbi confonde frequenza linguistica con struttura logica. Il fatto che Euclide usasse spesso la forma omologica non implica che la transitività non fosse alla base dell'evidenza. In termini di sequenti:

Schema contiguo: $aRb, bRc \vdash aRc$.
Schema omologico: $aRb, cRb \vdash aRc$.

Entrambi sono istanze di Trans(R). La differenza è sintattica, non semantica.

7. Epistemologia della perfezione
Definizione proposta:
Perfetto(S) se e solo se S è derivabile cut-free in LK.
Barbara soddisfa la definizione. Bocardo no: richiede conversioni, quindi cut. Questa è la traduzione moderna dell'idea aristotelica.

9. Conclusione
La transitività non solo spiega Barbara: lo caratterizza formalmente. La critica di Acerbi è debole perché confonde dimensione linguistica e logica. Storicamente, dai Pitagorici agli Stoici, dai medievali a Leibniz, la transitività è stata riconosciuta come il cuore della sillogistica.

Appendice

Il modello bayesiano completo
1 Definizione delle ipotesi

D = i dati osservati: 151 occorrenze omologiche su 200.
E = ipotesi descrittiva: la prassi testuale predilige la forma omologica.
¬E = ipotesi contraria: non c'è preferenza (omologico e contiguo equiprobabili).
T = ipotesi teorica: la transitività spiega la perfezione sillogistica.

Acerbi sembra assumere che D $\Rightarrow$ E e che E $\Rightarrow$ ¬T. La mia analisi mostra che il primo passo è valido (confermato dai calcoli), ma il secondo è ingiustificato.

1.2 Calcolo di P(E|D)
Modelliamo X, numero di occorrenze omologiche, come binomiale X ~ Bin(n=200,p).

Sotto ¬E: p=0.5.
Sotto E: p=0.8 (scelta plausibile, in linea con l'osservazione empirica).

La verosimiglianza sotto p è:
P(D|p) = C(200,151) p^151 (1-p)^49.
Il Bayes factor tra E e ¬E è:
BF = (0.8^151 · 0.2^49) / 0.5^200.
Prendendo logaritmi:

ln(BF) = 151 ln(0.8) + 49 ln(0.2) - 200 ln(0.5).
Calcolo:

151ln(0.8) ≈ -33.68.
49ln(0.2) ≈ -78.86.
-200ln(0.5) ≈ +138.63.
Somma = 26.09.

Quindi:
BF ≈ e^26.09 ≈ 2.0 × 10^11.
Con priors uguali, otteniamo:
P(E|D) ≈ 1 - 5×10^-12.
Dunque, i dati rendono praticamente certa la preferenza stilistica omologica. Qui Acerbi ha ragione piena.

1.3 Calcolo di P(T|D)
La legge della probabilità totale dice:
P(T|D) = P(T|E) · P(E|D) + P(T|¬E) · P(¬E|D).
Poiché P(E|D) ≈ 1, otteniamo:
P(T|D) ≈ P(T|E).
Questo risultato è cruciale: la probabilità di T dopo aver osservato i dati è determinata unicamente da quanto E, se vero, influisce su T.
Ma questa quantità P(T|E) non è derivabile dai dati empirici. È un'ipotesi aggiuntiva che Acerbi non argomenta. Perciò il suo salto da "E è vero" a "¬T" non è giustificato.

3. Simulazioni numeriche
Per rendere il ragionamento concreto, simuliamo tre scenari diversi:
1) Scenario ottimistico per T:
Supponiamo P(T|E) = 0.8, P(T|¬E) = 0.9.
Con P(E|D) ≈ 1:
P(T|D) ≈ 0.8.
Qui i dati quasi non abbassano la probabilità di T.
2) Scenario neutro:
P(T|E) = 0.5, P(T|¬E) = 0.5.
Allora:
P(T|D) ≈ 0.5.
Qui i dati non cambiano nulla: lasciano T indifferente.
3) Scenario "forte" per Acerbi:

$P(T|E) = 0.1$, $P(T|\neg E) = 0.9$.
Allora:
$P(T|D) \approx 0.1$.
Solo con questa assunzione estrema i dati rendono improbabile T.
Per cui i dati empirici da soli non abbassano la plausibilità della tesi transitiva.
È necessario postulare un legame concettuale forte fra prassi testuale ed evidenza sillogistica, che però non è dimostrato.
Per rafforzare il punto, presento contro-modelli concreti in cui D (prevalenza omologica) e T (transitività come spiegazione della perfezione) sono entrambi veri.

a) Euclide didattico vs Aristotele teorico:
Euclide, per chiarezza geometrica, usa lo schema omologico; Aristotele, per fondazione logica, riconosce la transitività della predicazione universale. Qui D e T convivono senza contraddizione.
b) Livello sintattico vs livello semantico:
L'omologico e il contiguo sono due modi di dire la stessa proprietà:
$(a=b \land c=b \Rightarrow a=c)$ e $(a=b \land b=c \Rightarrow a=c)$.
Se la proprietà è la transitività dell'uguaglianza, entrambi esprimono la stessa legge, pur con forme linguistiche diverse. D vero non implica ¬T.
c) Tradizione matematica vs tradizione logica:
La comunità dei matematici privilegia l'omologico per convenzioni didattiche; la comunità dei logici, invece, ragiona sulla transitività come proprietà inferenziale. Due piani distinti, compatibili.
4) Valore didattico vs valore fondativo nello stesso autore:
Un maestro può esporre un sillogismo in forma omologica a studenti principianti, ma al contempo spiegare nei propri scritti teorici che la sua perfezione deriva dalla transitività. Quindi $D \land T$ può valere nello stesso Aristotele.
Il calcolo bayesiano mostra che i dati di Acerbi rendono praticamente certa la preferenza stilistica omologica ($P(E|D) \approx 1$), ma non riducono affatto la plausibilità della tesi transitiva (T), salvo assumere a priori che $P(T|E)$ sia molto basso.
I contro-modelli testuali dimostrano che è perfettamente possibile, e anzi storicamente plausibile, che Euclide abbia preferito l'omologico e che Aristotele abbia concepito la perfezione come transitività.
Pertanto, la frequenza testuale non smentisce la transitività: mostra solo una differenza di livello tra stile linguistico e fondamento logico.
Acerbi parte da una preoccupazione metodologica: molti modelli moderni

spiegano perché alcuni sillogismi aristotelici appaiono «perfetti» attribuendo tutto alla transitività di una relazione (in parole semplici, al fatto che "se qualcosa sta in relazione a B, e B sta in relazione a C, allora quella cosa sta in relazione a C"). L'esempio canonico è Barbara: "A di tutti i B; B di tutti i C ⇒ A di tutti i C" — che, sul piano formale, sembra un'istanza della transitività.
Ma Acerbi osserva che la spiegazione per «transitività» si basa su una caratteristica superficiale ma costante dei sillogismi della prima figura: l'ordine particolare dei termini (quel «contiguo» che fa apparire il termine medio nella posizione che lo rende evidente). Questo ordine di termini è per Aristotele un attributo essenziale della prima figura (ne dà prova, secondo Acerbi, un passo degli Analitici Primi).
E qui sta il nodo metodologico: lo stesso ordine dei termini (la forma contigua) può essere collegato alla validità in modi diversi. Acerbi cita Peirce e De Morgan per ricordare che la teoria moderna delle relazioni ha formalizzato questi schemi, mostrando che molte inferenze sillogistiche possono essere viste come casi di composizione di relazioni. De Morgan dice, più o meno, che se la «copula» esprime una relazione transitiva, allora la conclusione segue per composizione - e che spesso è solo questione di come si dispone la notazione.
Acerbi trae quindi due conseguenze: la prima è prudenziale - conviene separare strettamente il fatto che il termine medio sia contiguo dalla tesi che questo fatto implichi necessariamente la transitività come unica spiegazione. La seconda è storica: la teoria delle relazioni può essere usata come modello naturale per spiegare la sillogistica, ma rischia di invertire i ruoli - prendere come spiegazione ciò che andrebbe spiegato (cioè usare un modello moderno per dettare la struttura storica, anziché leggere il testo antico e poi proporre il modello). Infine Acerbi sottolinea che Aristotele, a differenza dei matematici, sembra aver fissato una regola restrittiva: nella sua esposizione delle figure prime, non usa ha-mologie (forme «omologhe»), ma tiene ferma la relazione e la sua forma lessicale; insomma, Aristotele privilegia la fissità del copula e l'ordine «contiguo», e questo è un criterio metodologico che non va ignorato.
Così, in parole semplici, Acerbi dice "attenzione - sì, la teoria delle relazioni ricostruisce bene Barbara come caso di composizione, ma non possiamo prendere quel modello come l'unica spiegazione storica: il fatto che la 'contiguità' sia essenziale nei testi aristotelici suggerisce un'altra priorità concettuale, e la teoria moderna può confondere ciò che spiega con ciò che deve essere spiegato."
Perché la preoccupazione è sensata - e perché, malgrado ciò, non basta per

confutare la transitività
Usiamo anche qualche formula minima per essere precisi.
(i) Primo punto - Acerbi ha ragione nel richiamare cautela.
È corretto che il modo in cui termini e copule compaiono nei testi è storico e linguistico, e che non si deve automaticamente leggere la notazione antica come se gli autori «pensassero» nel vocabolario moderno delle relazioni. È anche vero che, quando la copula esprime relazioni non simmetriche (per esempio "A è predicato di tutti i B"), la posizione dei termini (chi sta come soggetto e chi come predicato) importa - non sono semplicemente intercambiabili come avviene per l'uguaglianza. Quindi la cura metodologica di Acerbi - «non importiamo il concetto moderno senza controllare i testi» — è giusta.
(ii) Secondo punto - però il rischio di generalizzare negativo: il fatto storico non smentisce la spiegazione formale.
Per vedere questo facciamola breve con un paio di formule e osservazioni:
La transitività di una relazione R R si esprime formalmente così:

Trans(R):$\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$.

La forma contigua di Barbara è precisamente un'istanza di questa proprietà, quando R è "essere predicato di tutti" (o, semanticamente equivalente, l'inclusione di classi): se
$B \subseteq A$ e $C \subseteq B$ allora $C \subseteq$.
In notazione insiemistica: $B \subseteq A \wedge C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A$.
Ora, Acerbi insiste che in Euclide e in altri testi matematici spesso si trovano formulazioni omologhe tipo "se $a = b$ e $c = b$ allora $a = c$ - cioè due proposizioni entrambe riferite allo stesso termine al centro, piuttosto che una «catena» aRb, bRc. Che cosa ci dice questo formalmente? Dipende dalla natura della relazione:
Se la relazione è simmetrica (uguaglianza =), allora

a = c segue sia da (a = b ∧ b = c) sia da (a = b ∧ c = b),

perché b = c ↔ c = b. Quindi per relazioni simmetriche le due forme (omologica / contigua) sono formalmente equivalenti. In matematica questo spiega perché Euclide poteva preferire l'una o l'altra: il fatto linguistico è neutro per la validità.
Se la relazione è non simmetrica (come la predicazione universale, che semanticamente corrisponde a inclusione di classi), allora l'omologico non è

in generale una forma equivalente a quella contigua — a meno che non si compia un'operazione che trasformi i ruoli (conversione, o sostituzione con la relazione converso). Perciò in questi casi la forma contigua è quella che rende evidente la transitività senza introdurre ulteriori assunzioni.

Quindi il punto tecnico è questo: quando il copula esprime una relazione che è la stessa in entrambe le premesse e transitiva, la contiguità esprime puramente la transitività; quando invece la relazione è simmetrica, l'omologico è soltanto un'altra notazione dello stesso fatto. Acerbi ha visto giustamente che la prassi matematica, nelle parti in cui la simmetria è presente, mostra un'abitudine a usare forme omologhe. Ma questo non cancella il fatto che, quando la relazione è asimmetrica (come in «essere predicato di tutti»), la contiguità è la manifestazione più naturale della proprietà transitiva.

(iii) Terzo punto — formalmente l'ordine dei termini non toglie il ruolo di transitività, purché si specifichi la relazione.

Acerbi dice: «se si può collegare la disposizione dei termini con la validità in molti modi, allora non si può dire che la caratteristica saliente della prima figura deve essere la transitività». È vero nel senso che l'ordine testuale è un indice ambiguo — ma formalmente possiamo separare i piani: esiste il piano sintattico/testuale e il piano semantico/formale. La transitività è una proprietà semantica; la contiguità/omologia sono realizzazioni sintattiche che possono rendere quella proprietà più o meno evidente. Il fatto che ci siano più maniere di rendere evidente una stessa proprietà non significa che la proprietà non sia la vera spiegazione. È come dire: la stessa equazione può essere scritta in molti formati (forma fattorizzata, espansa…), ma la «cosa vera» che la rende valida è la stessa identità algebrica.

(iv) Quarto punto — la critica di Acerbi sull'uso della teoria delle relazioni come «modello» che rovescia explanans e explanandum ha un seme di verità, ma non è decisiva.

Acerbi teme che mettendo la teoria delle relazioni al centro si finisca per trattarla come l'unica causa del fenomeno, cioè per invertire i ruoli: invece di usare la teoria per spiegare perché i testi assumono certe forme, la si prende come se fosse la vera struttura mentale alla base delle pratiche antiche. È una critica metodologica legittima: quando si propone un modello formale bisogna sempre ricordare che è un modello, non la mente dei nostri autori. Ma ciò non implica che il modello sia inutile o fuorviante: può essere un ottimo strumento esplicativo se si distingue chiaramente livello modellistico e livello storico.

(iii) Terzo punto — formalmente l'ordine dei termini non toglie il ruolo di

transitività, purché si specifichi la relazione.
Acerbi dice: «se si può collegare la disposizione dei termini con la validità in molti modi, allora non si può dire che la caratteristica saliente della prima figura deve essere la transitività». È vero nel senso che l'ordine testuale è un indice ambiguo — ma formalmente possiamo separare i piani: esiste il piano sintattico/testuale e il piano semantico/formale. La transitività è una proprietà semantica; la contiguità/omologia sono realizzazioni sintattiche che possono rendere quella proprietà più o meno evidente. Il fatto che ci siano più maniere di rendere evidente una stessa proprietà non significa che la proprietà non sia la vera spiegazione. È come dire: la stessa equazione può essere scritta in molti formati (forma fattorizzata, espansa…), ma la «cosa vera» che la rende valida è la stessa identità algebrica.
(iv) Quarto punto — la critica di Acerbi sull'uso della teoria delle relazioni come «modello» che rovescia explanans e explanandum ha un seme di verità, ma non è decisiva.
Acerbi teme che mettendo la teoria delle relazioni al centro si finisca per trattarla come l'unica causa del fenomeno, cioè per invertire i ruoli: invece di usare la teoria per spiegare perché i testi assumono certe forme, la si prende come se fosse la vera struttura mentale alla base delle pratiche antiche. È una critica metodologica legittima: quando si propone un modello formale bisogna sempre ricordare che è un modello, non la mente dei nostri autori. Ma ciò non implica che il modello sia inutile o fuorviante: può essere un ottimo strumento esplicativo se si distingue chiaramente livello modellistico e livello storico.
3) Un paio di esempi formali che chiariscono la disputa.

Esempio (uguaglianza - relazione simmetrica).
Se = è la relazione, allora

$(a = b) \wedge (c = b) \Rightarrow (a = c)$

è perfettamente valido perché c = b implica b = c. Qui l'omologico è naturale e la contiguità è solo un'altra notazione. Da un punto di vista formale, dire che la «copula» è transitiva non aggiunge nulla di nuovo: l'uguaglianza è sia simmetrica che transitiva.

Esempio (inclusione - relazione asimmetrica).
Per la predicazione universale interpretiamo A predicato di tutti i B come $B \subseteq A$. Allora Barbara è:

$(B \subseteq A) \wedge (C \subseteq B) \Rightarrow (C \subseteq A)$.

Qui la sola forma contigua esprime immediatamente la composizione di inclusioni: non si può riscrivere “C ⊆ B” come “B ⊆ C” senza cambiare il senso. Perciò è qui che la contiguità rende evidente la transitività: se si trasformasse (per convenzione linguistica) la premessa nella forma omologica, bisognerebbe introdurre una conversione, che non è innocua logicamente.
Questi esempi mostrano perché la preferenza di Euclide per l’omologico (quando lavora con uguali) non è evidenza contro l’idea che Aristotele abbia voluto evidenziare una proprietà formale (transitività) nelle figure della prima classe.
Se Acerbi vuole dimostrare che la transitività non può spiegare la perfezione, non basta mostrare la frequenza di una forma testuale. Serve una di queste cose:
- una prova che Aristotele concepiva «perfezione» in termini incompatibili con qualsiasi proprietà formale (p.es. «perfezione = sentimento psicologico»), o
- evidenze testuali che mostrino Aristotele esplicitamente rifiutare argomentazioni di tipo transitivo come base dell’evidenza, o
- dimostrazioni che nei casi rilevanti la relazione impiegata nelle premesse non è la stessa (cioè che in Barbara i due copula non denotano la stessa relazione), cosa che renderebbe la composizione relazionale impropria.

Finché tali prove mancano, la spiegazione in termini di transitività rimane una ipotesi forte, naturale e coerente con i dati testuali, purché si faccia attenzione a distinguere livello formale e livello testuale.
Per concludere in tono sintetico ma articolato: Acerbi ha il merito di ricordarci che l’analisi storica non è automatica e che i modelli moderni vanno usati con cautela; la sua osservazione sulla centralità dell’ordine dei termini nella prima figura è pertinente. Tuttavia, la sua conclusione forte — che la transitività non spiega la perfezione — non segue in modo necessario da quel dato. Formalmente:
- la transitività è una proprietà semantica che spiega Barbara quando la relazione in gioco è la stessa e transitiva;
- la maggiore o minore evidenza testuale di una data realizzazione sintattica (omologico vs contiguo) dipende dalla natura della relazione (simmetrica o meno) e da usi stilistici;
- la teoria delle relazioni è un modello esplicativo potente e legittimo, purché non venga confuso con un’ipotesi su ciò che gli antichi pensavano letteralmente.

Se volessimo chiudere la questione storicamente, le strade pratiche sono tre: (i) cercare in Aristotele e nei commentatori prove dirette sul significato di «perfezione» che rendano incompatibile o compatibile l'interpretazione transitiva; (ii) fare un'analisi testuale più estesa e contestuale (non solo contare formule ma leggere i contesti); (iii) formalizzare esplicitamente ogni occorrenza: determinare se nelle singole occorrenze il copula è lo stesso relazionale o se sono coinvolte relazioni diverse (e in quel caso vedere se l'uso omologico presuppone simmetria o conversione).
Acerbi ci mette in guardia da un'anacronistica sicurezza: non dobbiamo «leggere» Aristotele solo con gli strumenti moderni. Ma l'opposto estremo — respingere la transitività come spiegazione soltanto perché la prassi euclidea adotta una forma espositiva diversa - è troppo drastico. Il modo corretto è mediano: usare la teoria delle relazioni come modello esplicativo potente e controllarlo continuamente con i dati testuali e con precisazioni sul tipo di relazione coinvolta. Solo così si affronta correttamente la domanda su cosa renda «evidente» un sillogismo per Aristotele.